

المختبرات

2

مقاومة الهواء

من سلسلة
نور الصراط في علم المتفجرات

تقدمة:

مؤسسة بأس للإنتاج والتطوير الحربي

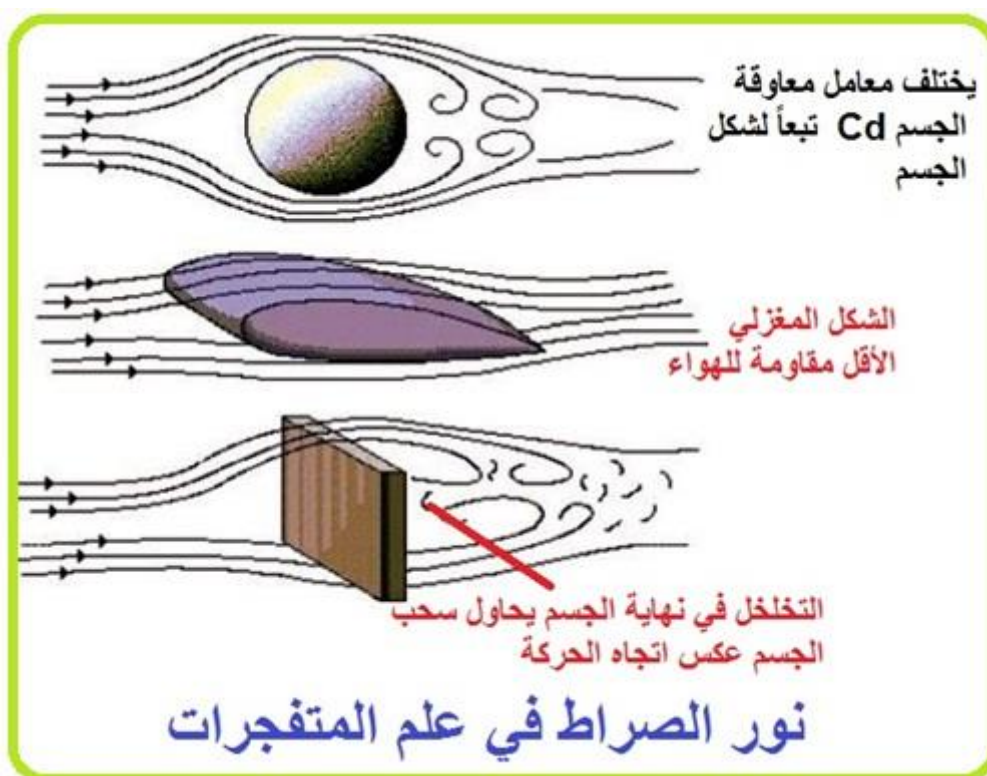


بسم الله الرحمن الرحيم

ثانيًا: حساب قوة مقاومة الهواء والعوامل المؤثرة فيها

مقاومة الهواء:

تكون قوة مقاومة الهواء معاكسة دوماً لاتجاه الحركة وتعمل على تخفيض سرعة المقذوف حيث تشكل قوة تكسب المقذوف تسارعاً معاكساً لاتجاه الحركة.



$D = 0.5 \rho C_d A V^2$ قانون حساب قوة مقاومة الهواء.

D: مقاومة الهواء ويكون اتجاهها معاكساً لاتجاه حركة المقذوف وواحدتها (نيوتن) N .

ρ : كثافة الهواء كغ/متر³ ، Kg/m^3 . (إن كثافة الهواء على ارتفاع منخفض ودرجة حرارة معتدلة تساوي ١,٢ تقريباً كغ/م³) وسيأتي شرح كيفية حساب الكثافة بالتفصيل.

A: مساحة المقطع العرضي الأكبر للقذيفة واحدتها m^2 متر مربع (مسقط المساحة الأكبر المواجهة للهواء).

V: سرعة ارتطام الهواء بالمقذوف في مستوي الحركة ويمكن اعتبارها سرعة المقذوف في حال حركة الرياح طبيعية ولم تكن هناك رياح قوية ، واحدة السرعة m/s متر/ ثانية.

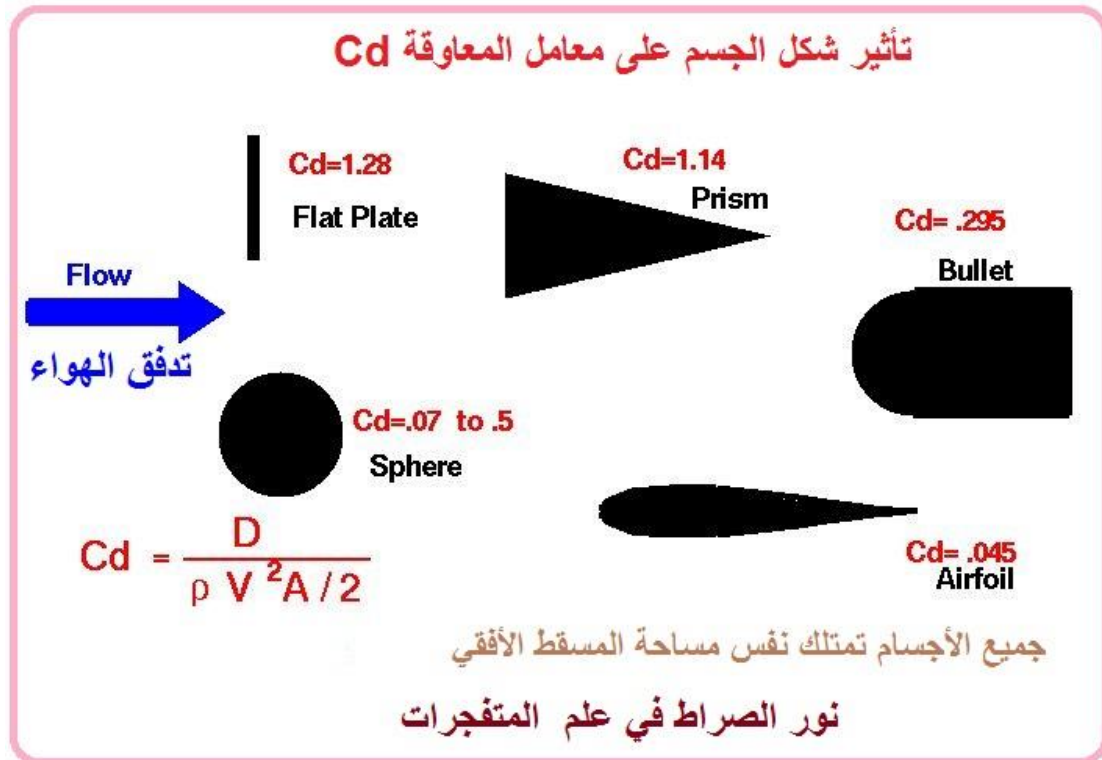
Cd: drag coefficient معامل معاوقة الشكل ويعتمد على شكل المقذوف ودرجة نعومة سطحه وكلما كان الشكل مغزلياً (كمعظم القذائف والصواريخ) سيكون هذا المعامل أصغر وبالتالي مقاومة الهواء أصغر،

ويحسب Cd عادة بشكل تجريبي من خلال نفس القانون كما يلي:

$$Cd = D / (0.5 \rho V^2 A)$$

ولكن يجب الانتباه إلى أنه عند حساب cd تجريبياً يجب أن تكون السرعة عند التجريب قريبة من السرعة الحقيقية وذلك لأنه في حال السرعات الكبيرة (الفوق صوتية) فإن Cd تتغير بشكل كبير نتيجة انضغاط الهواء وتغير كثافته.

باختصار: إن معامل المعاوقة يعتمد على السرعة أيضاً ولكن يمكن اعتبار تغيراته صغيرة عند فرق سرعات صغير في السرعات تحت الصوتية ، أما السرعات فوق الصوتية فإن معامل المعاوقة يختلف بشكل كبير ، وعموماً يفضل حساب معامل المعاوقة عند السرعة الحقيقية قدر الإمكان.



تؤثر مقاومة الهواء على الأجسام بأمريين هما:

١- احتكاك الهواء المتدفق مع الجسم المدروس وهنا تلعب نعومة السطح دوراً مهماً في تقليل قيمة هذا الاحتكاك.

٢- انضغاط الهواء في مقدمة الجسم وتخلخله في نهاية الجسم تشكل عاملاً معوقاً لحركة الجسم ولذلك يكون الشكل الانسيابي (المغزلي) هو الشكل المرغوب في السرعات الكبيرة وخاصة في الصواريخ والطائرات والقذائف.

في السرعات المنخفضة نسبياً تكون قوة الاحتكاك هي القوة الأكبر في مقاومة الهواء. بينما في السرعات العالية القريبة من الصوتية والفرق صوتية super sonic تكون قوة الاحتكاك friction صغيرة بالمقارنة مع القوة الناتجة عن شكل المقذوف.

وبمعرفة البارامترات يمكنك معرفة قوة مقاومة الهواء وبمعرفة هذه القوة يمكننا حساب تباطؤ القذيفة من خلال قانون نيوتن الثاني في التحريك $F=M.A$ بعد إسقاطه على كل محور على حده .

F : مجموع القوى الخارجية المؤثرة على المقذوف وهي قوى الثقل وهي شاقولية نحو الأسفل وقوى الاحتكاك وتكون معاكسة لاتجاه الحركة واحدها (نيوتن) N .

M : كتلة المقذوف (كغ) Kg .

A : التسارع (أو التباطؤ) الذي تكتسبه القذيفة جراء هذه القوى الخارجية متر / ثانية^٢.

وكما نعلم أن المقذوف يتغير اتجاهه أثناء مساره لذلك فإن قوة احتكاك الهواء يتغير مسارها أثناء حركة المقذوف وبالتالي تتغير مساقطها على المحورين الشاقولي والأفقي.

• هناك معامل اسمه معامل القذيفة Ballistic coefficient BC ويعبر هذا المعامل عن قدرة القذيفة على تخفيف تأثير مقاومة الهواء أثناء طيرانها ، أي كلما زادت BC يعني ثبات أكبر ومدى أطول للقذيفة وتعطى بالقانون التالي:

$$BC = \frac{M}{A.Cd} \text{ حيث } M: \text{ كتلة القذيفة و } A: \text{ مساحة مقطعها و } Cd \text{ معامل المعاوقة.}$$

• بسبب قوة مقاومة الهواء D نجد أن كلاً من المدى $range$ والارتفاع $altitude$ تقل كما أن سرعة القذيفة V تتباطأ مع الزمن نتيجة قوة الهواء لذلك فلا يصح أن نعتبر سرعة المقذوف ثابتة أثناء مسارها وبالتالي فإن قوة الاحتكاك ستكون متغيرة.

• كما أن الكثافة تنقص مع الارتفاع ولا يمكن إهمال تغير الكثافة بسبب تأثيرها الكبير على مدى وارتفاع المقذوف كما أن درجة الحرارة والضغط تؤثر على كثافة الهواء.

ملاحظة: بقدر دقتك في إدخال البيانات الحقيقية للحاسب بقدر ما تكون النتيجة واقعية أكثر.

تغير كثافة الهواء مع الارتفاع ودرجة الحرارة

إن معامل معاوقة الجسم C_d يتعلق كما أسلفنا بـ ρ كثافة الهواء وهذه الكثافة ليست ثابتة فهي تتغير تبعاً لدرجة الحرارة وللضغط الجوي والرطوبة .

والضغط الجوي وكما نعلم ينقص بالارتفاع عن سطح البحر ولذلك وحتى نحصل على أقرب قيمة للواقع فلا بد من حساب الكثافة بدقة.

قانون حساب الكثافة للغازات المثالية (الهواء الجاف أي دون بخار الماء).

$$\rho = \frac{P}{R \cdot (T + 273)} \text{ حيث:}$$

ρ : كثافة الهواء kg/m^3 .

R : ثابت الغازات العام للهواء ويساوي 287 جول/كغ.كلفن.

P : ضغط الغاز بالباسكال ويساوي الضغط الجوي عند سطح البحر 101325 باسكال وذلك في القيم المعيارية (درجة حرارة 15 درجة).

T : درجة الحرارة (درجة مئوية $^{\circ}\text{C}$).

مثال بسيط:

لنحسب كثافة الهواء الجاف (الخالي من الرطوبة) عند سطح البحر وعند درجة حرارة 15 درجة

$$\rho = \frac{101325}{(15 + 273) \cdot 287.06}$$

$$\rho = 1.224 \text{ kg/m}^3$$

وهكذا يمكن حساب الكثافة عند أي نقطة.

في الحقيقة لا يوجد هواء جاف دون وجود بخار ماء فيه ووجود بخار الماء ينقص من كثافة الهواء بسبب اختلاف كثافة الماء عن كثافة الهواء الجاف ، ولكن تأثير الرطوبة يمكن إهماله في

بسبب تأثيره القليل مقارنة مع تأثير كل من الضغط ودرجة الحرارة والارتفاع على الكثافة ، ومن أراد إدخال الكثافة في حساباته فليستعمل قانون الحالة للغازات الحقيقية ويمكنه الاستفادة من قانون دالتون للضغوط الجزئية.

علاقة كل من الضغط ودرجة حرارة الهواء بالارتفاع عن سطح البحر

من قانون الغازات السابق تبين لنا أن للكثافة علاقة بكل من الضغط ودرجة حرارة الهواء وهذان البارامتران (الضغط والحرارة) يتعلقان بالارتفاع عن سطح البحر ،

حيث إن درجة الحرارة تتناقص خطيًا كلما ارتفعنا عن سطح البحر بينما يكون تناقص الضغط بشكل أسي كلما ارتفعنا عن سطح البحر وهذا الكلام صحيح فقط في حالة طبقات الجو المنخفضة التروبوسفير troposphere أي على ارتفاع لا يزيد عن ١١ كم عن سطح البحر.

ثالثاً: كيفية حساب كثافة الهواء عند ارتفاع محدد:

(١) نحسب الضغط عند ذلك الارتفاع.

من القانون التالي الخاص بالهواء في طبقة التروبوسفير المأخوذ من ناسا يمكن إيجاد الضغط عند ذلك الارتفاع.

$$P2 = 101290 * \left(1 - \frac{0.00649 * h}{288.08}\right)^{5.256} \quad (\text{pa})$$

h: ارتفاع القذيفة عن سطح البحر في اللحظة المدروسة (متر).

P2: الضغط على ارتفاع h (باسكال).

(٢) نحسب درجة الحرارة عند ذلك الارتفاع

حيث إن درجة الحرارة تنقص بمقدار 6.49 درجة كلما ارتفعنا ١٠٠٠ متر ، وتحسب درجة الحرارة من القانون التجريبي التالي:

$$T2 = T1 - (0.00649 * h) \quad \text{درجة مئوية}$$

T1: درجة الحرارة على سطح الأرض (درجة مئوية) .

T1: درجة الحرارة عند الارتفاع h (درجة مئوية).

h: الارتفاع (متر).

ثالثاً: بعد ذلك نعوض في قانون الحالة للغازات المثالية

$$\rho = \frac{P2}{R.(T2+273.1)}$$

p: كثافة الهواء kg/m³.

R: ثابت الغازات العام للهواء ويساوي 287 جول/كغ.كلفن.

P2: ضغط الهواء عند الارتفاع h.

T2: درجة حرارة الهواء عند ذلك الارتفاع والتي حسبناها سابقاً (درجة مئوية).

مثال: احسب كثافة الهواء عند ارتفاع ١٥٠٠ متر عن مكان الإطلاق علماً أن درجة الحرارة على مكان الإطلاق تساوي ٣٠ درجة مئوية، ومكان الإطلاق على مستوى سطح البحر.

الحل:

المعطيات:

$$H=1500 \text{ m} , T1=30^{\circ}\text{c} , , T2=? , P2=?$$

أولاً): نحسب درجة الحرارة عند ذلك الارتفاع

من القانون:

$$(T2= T1- (0.00649 * h$$

$$T2=30-(0.00649 * 1500) = 20.265^{\circ}\text{c}$$

ثانياً) نحسب الضغط عند ذلك الارتفاع

$$P2 = 101290 * \left(1 - \frac{0.00649 * h}{288.08}\right)^{5.256} \text{ pa}$$

$$P2 = 101290 * \left(1 - \frac{0.00649 * 1500}{288.08}\right)^{5.256} = 84546 \text{ pa}$$

ثالثاً: بعد ذلك نعوض في قانون الحالة للغازات المثالية

$$\rho = \frac{P2}{R. (T2 + 273.15)}$$

$$\rho = 84564 / 287 * (19.59 + 273.15)$$

$$\rho = 1.006 \text{ kg/m}^3$$

مسألة:

احسب كثافة الهواء على ارتفاع ٣٠٠٠ متر علماً أن درجة الحرارة على سطح الأرض في مكان الإطلاق 11 درجة.

الحل:

$$H=3000 \text{ m} , T_1=11^\circ\text{C} , T_2=? , P_2=?$$

أولاً): نحسب درجة الحرارة عند ذلك الارتفاع

من القانون:

$$(T_2 = T_1 - (0.00649 * h$$

$$T_2 = 11 - (0.00649 * 3000) = -8.47^\circ\text{C}$$

ثانياً) نحسب الضغط عند ذلك الارتفاع

$$P_2 = 101290 * \left(1 - \frac{0.00649 * h}{288.08}\right)^{5.256} \text{ pa}$$

$$P_2 = 101290 * \left(1 - \frac{0.00649 * 3000}{288.08}\right)^{5.256} = 70118 \text{ pa}$$

ثالثاً: بعد ذلك نعوض في قانون الحالة للغازات المثالية

$$\rho = P_2 / R * (T_2 + 273.15)$$

$$\rho = 70118 / 287 * (-8.47 + 273.15)$$

$$\rho = 0.923 \text{ kg/m}^3$$

يمكن دمج القانونين لحساب الكثافة مباشرة فتصبح كما يلي:

$$\rho = \frac{101290 * (1 - \frac{0.00649 * h}{288.08})^{5.256}}{287 * (T1 - 0.00649 * h + 273.1)}$$

تغير تسارع الجاذبية مع الارتفاع

نحن نعلم أن ثقل القذيفة يعتبر قوة تؤثر على القذيفة واتجاهها نحو الأسفل حيث

تساوي قوة الجاذبية $F_g = m \cdot g$ حيث:

F_g : قوة الجاذبية الأرضية (نيوتن).

m : كتلة الجسم (كغ).

g : تسارع الجاذبية الأرضية متر/ثا².

حيث إن $g_{sl} = 9.80662 \text{ m/s}^2$ وذلك عند سطح البحر sea Level ولكن هذه القيمة

تتناقص مع الارتفاع وفق القانون التالي:

$$g = g_{sl} * (1 - 2 \frac{h}{R_e}).$$

حيث g : تسارع الجاذبية عند الارتفاع h (كم) عن سطح البحر.

R_e : نصف قطر دوران الأرض ويساوي تقريباً ٦٤٠٠ كم.

بالتعويض يصبح القانون:

$$g = 9.80662 * (1 - 2 \frac{h}{6400}).$$

مثال:

احسب قوة الثقالة لقذيفة كتلتها ١٠ كغ وذلك في الحالتين:

الحالة الأولى: وهي على ارتفاع ١٠٠ متر عن سطح البحر.

الحالة الثانية: وهي على ارتفاع ١٠ كم عن سطح البحر.

الحل:

لا ننسى توحيد الواحدات أي نضع h و Re بنفس الواحدات إما كلاهما متر أو كلاهما كيلو متر.

الحالة الأولى: من القانون $g = g_{sl} * (1 - 2 \frac{h}{Re})$.

١٠٠ متر = ٠,١ كم

$$g = 9.80662 * (1 - 2 \frac{0.1}{6400}) = 9.8063 \text{ m/s}^2$$

وبالتالي ف قوة الثقالة وحسب قانون نيوتن الثاني تساوي التسارع بالكتلة

$F = m.a$ الشكل العام لقانون نيوتن الثاني والتسارع a هنا هو تسارع الجاذبية g .

سنسمي قوة الثقالة F_g .

$$F_g = m.g = 10 * 9.8063 = 98.063 \text{ N}$$

الحالة الثانية:

من القانون $g = g_{sl} * (1 - 2 \frac{h}{Re})$.

$$g = 9.80662 * (1 - 2 \frac{10}{6400}) = 9.7759 \text{ m/s}^2$$

$$F_g = m.g = 10 * 9.7759 = 97.759 \text{ N}$$

رابعاً) كيفية استخراج معادلة مسار قذيفة

معادلة المسار: هي معادلة تصف حركة القذيفة أثناء مسارها بحيث نستطيع معرفة ارتفاعها بدلالة مداها في أي نقطة من نقاط طيرانها.

كما يمكننا معرفة زمن وصول القذيفة إلى أي نقطة محددة.

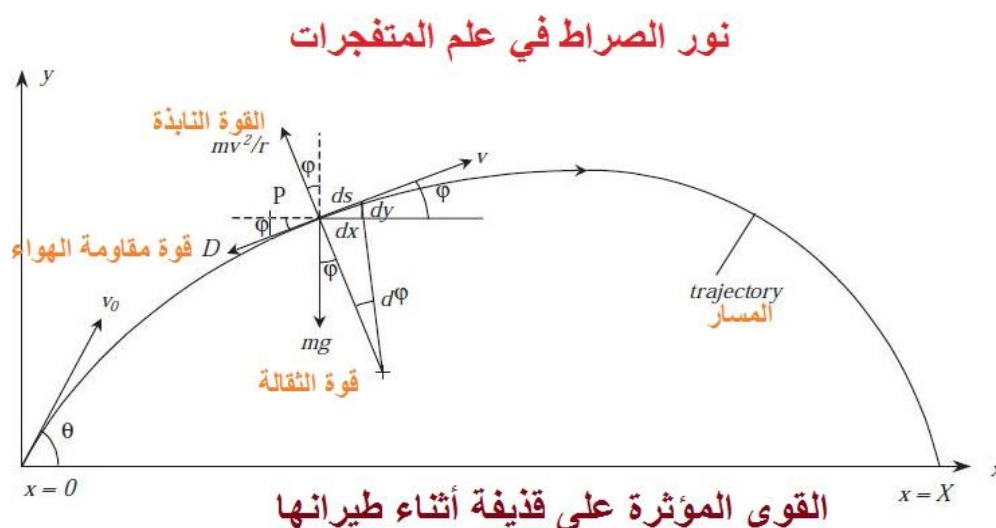
لن أتطرق إلى الاستخراج الرياضي الكلاسيكي لهذه المعادلة ولكن سأتكلم باختصار عن كيفية استخراجها ثم أضعها جاهزة للاستخدام مباشرة.

القوى المؤثرة على القذيفة أثناء طيرانها:

قوة مقاومة الهواء: تم شرحها سابقا بالتفصيل.

قوة الثقالة: تم شرحها سابقا أيضاً.

القوة النابذة: وهي قوة تنتج بسبب الحركة الدائرية (قوس) للقذيفة ويكون اتجاهها عكس مركز الدوران منطبقة على نصف قطر الدوران (القوس) وتساوي حسب قانون نيوتن الثاني وبعد إسقاطه على نصف القطر $m \cdot v^2 / r$ حيث إن r نصف قطر تقوس مسار القذيفة .



ملاحظة: لم يتم التطرق إلى تأثير الرياح على مسار القذيفة أي أننا اعتبرنا أن سرعة الرياح طبيعية والجو لا يوجد فيه عواصف أو رياح عاتية.

وكما شرحنا بالتفصيل البارامترات المتغيرة أثناء الطيران والمتعلقة بالارتفاع هي:

الكثافة.

تسارع الجاذبية الأرضية.

حسب قانون نيوتن الثاني نكتب $F = m \cdot a$

حيث F : مجموع القوى الخارجية المؤثرة و a التسارع و m : كتلة القذيفة.

نقوم بإسقاط المعادلة على المحورين الأفقي والشافولي ، وكما نعلم بأن التسارع هو المشتق الثاني للمسافة والسرعة هي المشتق الأول للمسافة ثم نحل المعادلة التفاضلية الناتجة باستخدام سلسلة ماكلوران Maclaurin Series ونكتفي بالتقريب حتى الأس الثالث من السلسلة فينتج لدينا بعد التقريب والاختصار المعادلة التالية:

$$Y = \tan\theta \cdot X - \frac{g \cdot X^2}{2 \cdot V_0^2 \cdot (\cos\theta)^2} * \left[1 + \frac{Cd \cdot A \cdot \rho \cdot X}{3 \cdot m \cdot \cos(\theta)} \right]$$

حيث:

θ : زاوية الإطلاق الابتدائية (زاوية ميلان المدفع عن الأفق).

X : مدى القذيفة (متر).

Y : ارتفاع القذيفة (متر).

g : تسارع الجاذبية الأرضي في نقطة الإطلاق متر/ثا².

V_0 : سرعة القذيفة الابتدائية (متر بالثانية).

ρ : الكثافة عند نقطة الإطلاق كغ/متر³.

Cd : معامل معاوقة الشكل.

A : مساحة المقطع العرضي الأعظمي للقذيفة (متر مربع).

θ : زاوية ميلان المدفع الابتدائية.

m : كتلة القذيفة (كغ).

ويمكن حساب السرعة الابتدائية من خلال القانون السابق بحيث تكون $y=0$

$$V_0 = \sqrt{\frac{g \cdot X}{2 \cdot \tan\theta \cdot (\cos\theta)^2} * \left(1 + \frac{Cd \cdot A \cdot \rho \cdot X}{3 \cdot m \cdot \cos(\theta)} \right)}$$

زمن وصول القذيفة إلى أي نقطة من مسار طيرانها:

يمكن حساب زمن وصول القذيفة إلى أي نقطة بمعرفة مدى تلك النقطة وذلك من خلال القانون التالي:

$$t = \frac{2 \cdot m}{3V_o \cdot \rho \cdot Cd \cdot A} * \left[\left(1 + \frac{Cd \cdot A \cdot \rho \cdot x}{m \cdot \cos(\theta)} \right)^{1.5} - 1 \right]$$

حيث:

t: زمن وصول القذيفة إلى النقطة المدروسة بالثانية.

x: مدى النقطة التي نريد حساب الزمن عندها (بعد النقطة التي نريد حساب زمن الوصول إليها عن نقطة الإطلاق) (متر).

وباقى الواحدات هي نفس القانون السابق.

حساب سرعة القذيفة في أي نقطة من نقاط مسارها

بسبب القوى المؤثرة على القذيفة تنخفض سرعة القذيفة أثناء الطيران ويمكن حساب سرعة القذيفة عند أي مدى X من خلال القانون التالي.

$$V = V_o * \frac{\cos \theta}{\cos \phi} * \left(1 + \frac{Cd \cdot A \cdot \rho \cdot x}{m \cdot \cos(\theta)} \right)^{-0.5}$$

حيث:

V: سرعة القذيفة في النقطة المدروسة عندما يصبح مدى القذيفة X متر.

V_o: سرعة القذيفة الابتدائية.

θ: زاوية القذف الابتدائية.

φ: زاوية سقوط القذيفة وتحسب بالقانون التالي:

$$\tan\varphi = \tan\theta - \frac{g.X}{2*(V_0.\cos\theta)^2} * \left(2 + \frac{Cd.A.\rho.X}{m.\cos(\theta)}\right)$$

معرفة أعلى ارتفاع تصل إليه القذيفة

يتم حساب أعلى ارتفاع تصل إليه القذيفة Y_{\max} من القانون التالي:

$$Y_{\max} = Xs.\tan\theta * \left(\frac{\cos(\theta) + 2.\rho.\frac{Cd.A.Xs}{3.m}}{2\cos(\theta) + 3\frac{Cd.A.Xs}{3.m}} \right)$$

حيث:

Y_{\max} : أعلى ارتفاع تصل إليه القذيفة (متر).

Xs : المدى الموافق لأعلى ارتفاع تصل إليه القذيفة (متر).

وتحسب Xs من القانون التالي:

$$Xs = \frac{m.\cos(\theta)}{\rho.Cd.A} * \left[\left(1 + \frac{3Cd.A.\rho.X}{3.m.\cos(\theta)} \left(1 + \frac{Cd.A.\rho.X}{3.m.\cos(\theta)} \right) \right)^{0.5} - 1 \right]$$

معرفة مدى القذيفة عند سقوطها على الأرض

(نقطة الإطلاق ونقطة السقوط بنفس الارتفاع عن سطح البحر) وهي مفيدة في حالة الهاون والمدفعية .

يتم حساب مدى القذيفة من معادلة المسار التي استخرجناها

$$Y = \tan\theta.X - \frac{g.X^2}{2.V_0^2.(\cos\theta)^2} * \left[1 + \frac{Cd.A.\rho.X}{3.m.\cos(\theta)} \right]$$

وذلك بوضع الارتفاع $y=0$ وحل المعادلة واستبعاد الحلول المرفوضة (الحل الصفري والحل السالب) وبعد إصلاح المعادلة ينتج لدينا المعادلة التالية:

$$X = \frac{\frac{1}{2Vo} - \sqrt{\frac{1}{4Vo^2} + \frac{2.Cd.A.\rho.\sin(\theta)}{3.m.g}}}{\frac{-Cd.A.\rho}{3.m.V\cos(\theta)}}$$

مسألة:

لدينا مدفع هاون عياره ٨١ ملم وسرعة القذيفة الابتدائية عند عدد كعكات معين من البارود تساوي ٣٥٦ متر بالثانية.

وقيست تجريبياً قذيفة بزاوية ٧٠ درجة أطلقت من منطقة ترتفع ١٠٠ متر عن سطح البحر وكانت درجة الحرارة عندها ١٠ درجة فكان مدى القذيفة يساوي ٤٢٠٠ متر المطلوب.

علماً ان وزن القذيفة كاملاً عدا الحشوة الدافعة تساوي ٤ كغ.

والخلوص بين سبطانة المدفع والقذيفة ٧ دوزيم (٠,٧ مم) أي عيار القذيفة الفعلي ٨٠,٣ مم.

أوجد:

١-مدى القذيفة.

٢-زمن الوصول إلى الهدف على الأرض.

٣-أعلى ارتفاع تصل إليه.

٤-زمن الوصول إلى أعلى ارتفاع.

وذلك عندما تطلق القذيفة بزاوية ٨٠ درجة علماً أن القذيفة تطلق من مكان يرتفع ٩٠٠ متر عن سطح البحر ودرجة حرارة الجو لحظة ومكان الإطلاق ٣٠ درجة مئوية .

الحل:

بداية نحسب Cd تجريبياً من خلال الأرقام التي نتجت خلال تجربة القذيفة من خلال القانون

$$Cd = \frac{3.m.\cos(\theta)}{A.p_{test}.X} * \left(\frac{Vo^2.\sin 2\theta}{g_{test}.X} - 1 \right)$$

نحسب الكثافة على ارتفاع ١٠٠ متر وعند درجة حرارة ١٠ مئوية.

$$\rho_{\text{test}} = \frac{101290 * (1 - \frac{0.00649 * 100}{288.08})^{5.256}}{287 * (10 - 0.00649 * 100 + 273.1)}$$

$$\rho_{\text{test}} = 1.2348 \text{ Cd/m}^3$$

نحسب تسارع الجاذبية مكان الاختبار g_{test} عند ارتفاع ١٠٠ متر = 0.1 كم عن سطح البحر:

$$g_{\text{test}} = 9.80662 * (1 - 2 \frac{h}{6400}).$$

$$g_{\text{test}} = 9.80662 * (1 - 2 \frac{0.1}{6400}) = 9.8063 \text{ m/s}^2.$$

نحسب مساحة مقطع القذيفة الأعظمي A .

نأخذ المساحة بالمتر المربع لأنه الوحدة القياسية

$$A = \pi . D^2 / 4$$

$$A = \pi . ((80.3 * 10^{-3})^2) / 4 = 5064 * 10^{-6} \text{ m}^2$$

الآن نعوض في القانون:

$$Cd = \frac{3.m.\cos(\theta)}{A.\rho_{\text{test}}.X} * \left(\frac{Vo^2.\sin 2\theta}{g_{\text{test}}.X} - 1 \right)$$

$$Cd = \frac{3 * 4 * \cos(70)}{0.005064 * 1.2348 * 4200} * \left(\frac{356^2.\sin(2 * 70)}{9.8063 * 4200} - 1 \right)$$

$$Cd = 0.15282$$

$$Cd = 0.153 \text{ تقريباً}$$

K	J	I	H	G	F	E	D	C	B	A
الخلوص بين سبطانة المدفع والتقنية mm	عيار المدفع mm	كتلة m التقنية Kg	درجة الحرارة مكان الإطلاق الاختباري	ارتفاع مكان الاختبار عن سطح البحر	سرعة القذيفة الابتدائية	زاوية الإطلاق عند الاختبار	مدى القذيفة (متر)			cd
0.7	81	4	10	100	356	70	4200			0.152820001
			فقط أدخل الأرقام في المربعات المظلمة بالأعلى							
			فقط أدخل القيم التي نتجت من التجربة هنا وسيتم حساب cd تلقائياً ، أعد إدخال الأرقام التي تتجيب من الاختبارات ومن ثم خذ القيمة الوسطية وضعها في معادلة المسار في ملف (مسار قذيفة نهائي)							

ملاحظة: عند حساب CD نأخذ المعطيات والبارامترات أثناء التجريب الاختباري فقط.

ملاحظة: يتم إجراء التجريب الاختباري عدة مرات وبزوايا مختلفة ومن ثم نأخذ القيمة الوسطية من خلال القانون التالي:

$$Cd = \sqrt{\frac{Cd1 + Cd2 + Cd3 + \dots + Cdn}{n}}$$

حيث: Cd: القيمة الوسطية النهائية المعتمدة لهذا النوع من القذائف.

Cd1, Cd2, Cd3, Cdn: القيم الناتجة عن التجريب الاختباري للمرة الأولى والثانية حتى n مرة.

n: عدد مرات التجريب الاختباري.

نستخرج معادلة المسار للقذيفة:

$$Y = \tan\theta \cdot X - \frac{g \cdot X^2}{2 \cdot V0^2 \cdot (\cos\theta)^2} * \left[1 + \frac{Cd \cdot A \cdot \rho \cdot X}{3 \cdot m \cdot \cos(\theta)} \right]$$

يجب علينا حساب g و ρ مكان إطلاق القذيفة

حساب g:

لدينا الارتفاع مكان الإطلاق ٩٠٠ متر أي ٩,٠ كم.

$$g = 9.80662 * \left(1 - 2 \frac{h}{6400} \right).$$

$$g = 9.80662 * \left(1 - 2 \frac{0.9}{6400} \right) = 9.80386 \text{ m/s}^2$$

حساب ρ :

لدينا ارتفاع مكان الإطلاق ٩٠٠ متر ودرجة حرارة الجو لحظة الإطلاق تساوي ٣٠ درجة.

$$\rho = \frac{101290 * (1 - \frac{0.00649 * h}{288.08})^{5.256}}{287 * (T1 - 0.00649 * h + 273.1)}$$

$$\rho = \frac{101290 * (1 - \frac{0.00649 * 900}{288.08})^{5.256}}{287 * (30 - 0.00649 * 900 + 273.1)} = 1.06608 \text{ Kg/m}^3$$

الآن نعوض البارامترات في معادلة المسار حيث أصبح لدينا المعطيات كاملة

$$\theta = 80, g = 9.80386 \text{ m/s}^2, V_0 = 356 \text{ m/s}, C_d = 0.153, m = 4 \text{ Kg},$$

$$\rho = 1.06608 \text{ Kg/m}^3, A = 5064 * 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$Y = \tan \theta \cdot X - \frac{g \cdot X^2}{2 \cdot V_0^2 \cdot (\cos \theta)^2} * [1 + \frac{C_d \cdot A \cdot \rho \cdot X}{3 \cdot m \cdot \cos(\theta)}]$$

$$Y = \tan 80 \cdot X - \frac{9.80386 \cdot X^2}{2 \cdot (356)^2 \cdot (\cos 80)^2} * [1 + 3.964 * 10^{-4} X]$$

$$Y = 5.67128 X - 1.2827 * 10^{-3} X^2 - 5.0846 * 10^{-7} X^3$$

ومن أجل أن نعرف مدى القذيفة أي عندما تسقط عل الأرض وعندها تكون $Y=0$.

لذلك نعوض $y=0$ فنتنتج لدينا معادلة من الدرجة الثالثة حلولها كالتالي:

$$X_1 = 0 \text{ m}, X_2 = -4830 \text{ m/s}, X_3 = 2310 \text{ m/s}$$

$X_1 = 0$ هي لحظة الإطلاق حيث تكون عندها $Y=0$.

$X_2 = -4843$ حل مرفوض لأنه سالب.

هو الحل المطلوب ☺. $X=X_1=2310 \text{ M/S}$

أي إن القذيفة ستسقط على بعد 2310 متر من نقطة الإطلاق.

أو يمكن استخراج المدى التي تصل إليه القذيفة مباشرة من المعادلة التالية:

$$X = \frac{\frac{1}{2Vo} - \sqrt{\frac{1}{4Vo^2} + \frac{2Cd.A.\rho \sin(\theta)}{3.m.g}}}{\frac{-Cd.A.\rho}{3.m.V \cos(\theta)}}$$

حساب الزمن الذي تستغرقه القذيفة للوصول إلى الهدف.

$$t = \frac{2m}{3Vo.\rho.Cd.A} * \left[\left(1 + \frac{\rho.Cd.A.x}{m.\cos(\theta)} \right)^{1.5} - 1 \right]$$

$$\theta=80, g=9.80386 \text{ m/s}^2, Vo=356 \text{ m/s}, Cd=0.153,$$

$$A = 5064 * 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\rho=1.06608 \text{ Kg/m}^3, X=2310 \text{ m/s}$$

$$t = \frac{2*4}{3*356*1.06608*0.153*5064*10^{-6}} * \left[\left(1 + 1.06608 * 0.153 * 5064 * 10^{-6} * \frac{2310}{4*\cos(80)} \right)^{1.5} - 1 \right]$$

$$t=56.66 \text{ second}$$

ثانية

أعلى ارتفاع تصل إليه القذيفة.

$$Y_{\max} = Xs.\tan\theta * \left(\frac{\cos(\theta) + 2.\rho.\frac{Cd.A}{3m}.Xs}{2\cos(\theta) + \frac{Cd.A}{m}.Xs} \right)$$

حيث:

$$Xs = \frac{m \cdot \cos(\theta)}{\rho \cdot Cd \cdot A} * \left[\left(1 + \frac{\rho \cdot Cd \cdot A \cdot X}{m \cdot \cos(\theta)} \left(1 + \frac{Cd \cdot A \cdot \rho \cdot X}{3m \cdot \cos(\theta)} \right) \right)^{0.5} - 1 \right]$$

بداية نحسب المدى الموافق لوصول القذيفة إلى أعلى ارتفاع Xs:

$$Xs = \frac{4 \cdot \cos(80)}{1.06608 \cdot 0.153 \cdot 5064 \cdot 10^{-6}} * \left[\left(1 + \left(\frac{1.06608 \cdot 0.153 \cdot 5064 \cdot 10^{-6} \cdot 2310}{4 \cdot \cos(80)} \right) * \left(1 + \frac{(0.153 \cdot 5064 \cdot 10^{-6} \cdot 1.06608 \cdot 2310)}{3 \cdot 4 \cdot \cos(80)} \right)^{0.5} - 1 \right] \right]$$

Xs=1262.7 m. المدى الموافق لأعلى ارتفاع تصل إليه القذيفة.

نعوض Xs بقانون Ymax.

$$Y_{\max} = Xs \cdot \tan \theta * \left(\frac{\cos(\theta) + 2 \cdot \rho \cdot \frac{Cd \cdot A}{3m} \cdot Xs}{2 \cos(\theta) + \frac{Cd \cdot A}{m} \cdot Xs} \right)$$

$$Y_{\max} = 1262.7 * \tan 80$$

$$* \left(\frac{\cos(80) + 2 * 1.06608 * 0.153 * 5064 * 10^{-6} * 1262.7 / (3 * 4)}{2 \cos(80) + 0.153 * 5064 * 10^{-6} * 1262.7 / 4} \right)$$

$$.Y=4204 \text{ m}$$

أعلى ارتفاع تصل إليه القذيفة.

زمن الوصول إلى أعلى ارتفاع.

$$t = \frac{2 \cdot m}{3Vo \cdot \rho \cdot Cd \cdot A} * \left[\left(1 + \frac{\rho \cdot Cd \cdot A \cdot xs}{m \cdot \cos(\theta)} \right)^{1.5} - 1 \right]$$

$$t = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 356 \cdot 1.06608 \cdot 0.153 \cdot 5064 \cdot 10^{-6}} * \left[\left(1 + 1.06608 * 0.153 * 5064 * 10^{-6} * \frac{1262.7}{4 \cdot \cos(80)} \right)^{1.5} - 1 \right]$$

t=26.81 second ثانية زمن الوصول لأعلى ارتفاع.

زمن وصول القذيفة للأرض	الارتفاع الأعظمي التي تصل إليه القذيفة Ymax	المدى الأفقي الموافق لأعلى ارتفاع Xs	زمن الوصول إلى أعلى ارتفاع	زاوية الإطلاق θ	معامل Cd المعاوقة ويحسب من السوليد	كتلة القذيفة M kg	عيار القذيفة mm	ارتفاع مكان H الإطلاق عن سطح البحر	سرعة القذيفة الابتدائية	درجة حرارة الجو مكان الإطلاق
56.6655	4092.42333	1262.71877	26.812057	80	0.153	4	81	900	356	30

انتهت المسألة والحمد لله.

- في حال عدم امكانية الحصول على جهاز يقيس السرعة الابتدائية للقذيفة فإننا نحسبه تجريبياً من خلال تجربة للقذيفة ومعرفة المدى وبارامترات الإطلاق ومعرفة معامل المعاوقة Cd للقذيفة عن طريق برنامج السوليد ووركس أو أي برنامج آخر قادر على محاكاة (simulation) القوى المؤثرة على القذيفة أثناء الطيران وسنشرح ذلك بالتفصيل في فقرة استخدام البرامج الالكترونية .

كيفية حساب سرعة القذيفة تجريبياً

وسنكمل بها في الأسبوع التالي إن شاء الله

والحمد لله رب العالمين